

В.І. Солодкий, к.т.н., доц.

Національний технічний університет України "КПІ"

## РОЗМІР ПОЧАТКОВОГО КОЛА ПРИ ОБРОБЦІ ДЕТАЛЕЙ МЕТОДОМ КОЧЕННЯ

*Викладено методику визначення радіуса початкового кола для кінематичної схеми формоутворення деталей, що відповідає коченню кола по прямій. Розглянуто питання впливу форми лінії зачеплення на профіль інструмента. Визначено точку повернення на лінії зачеплення, а також умови отримання активної ділянки лінії зачеплення максимальної довжини.*

**Вступ. Постановка проблеми.** При формоутворенні прямобічних деталей, типу шліцьових валів, методом обкатки за схемою кочення кола по прямій, форма різальних кромок, розміри інструмента та сама можливість його існування залежать від розмірів початкового кола.

У випадку, коли початкове коло прийняте занадто великим, на поверхні деталі можуть виникати перехідні ділянки і деталь неможливо виготовити. Коли ж початкове коло прийняте меншим за допустимий розмір, неможливо відтворити сам інструмент, а його різальні кромки перетинають одна одну.

У той же час, форма, розміри та сама наявність, або відсутність перехідних ділянок на поверхні деталі можуть бути визначені до початку обробки деталі, шляхом аналізу лінії зачеплення інструмент–деталь. Однак питання аналізу лінії зачеплення та розміру початкового кола існуючі аналітичні методики не розглядають.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Існуючі методики профілювання інструмента, який працює за схемою кочення кола по прямій [1, 2, 3] торкаються лише питань визначення профілю початкової інструментальної поверхні при вже відомому розмірі початкового кола. Методики довідкового характеру [4] взагалі не обґрунтовують питання вибору розміру початкового кола, рекомендуючи його розміри залежно від конструктивного класу деталей – шліцьовий вал, багатогранний вал тощо.

Одночасно, існуючі аналітичні методики визначення профілю інструмента локалізують його існування тільки в межах початкового кола. Але різальні кромки можуть існувати і за межами початкового кола. На практиці, частину різальної кромки, яка виходить за межі початкового кола або інтерполюють, або взагалі продовжують суто

геометрично. Все це значно ускладнює профілювання високоякісного обкатного інструмента.

**Формулювання цілей статті.** Метою даної роботи є розробка методики визначення розмірів початкового кола та області існування різальної кромки для схеми формоутворення, яка відповідає коченню кола по прямій. Аналіз форми лінії зачеплення дає можливість встановити межі існування різальної кромки, що, в свою чергу, дозволяє знайти мінімально допустимий розмір початкового кола та прогнозувати наявність перехідних ділянок на поверхні деталі.

**Викладення основного матеріалу дослідження. Лінія зачеплення інструмент–деталь.** При формоутворенні деталей методом обкатки контакт між деталлю та інструментом відбувається по деякій просторовій поверхні. У тому випадку, коли поверхні деталі допускають ковзання сам по собі поверхневий контакт між деталлю та інструментом можливо звести до контакту по лінії. У нерухомій системі координат ця лінія є геометричним місцем точок формоутворення і називається лінія зачеплення.

Отже, якщо відома лінія зачеплення, то залежно від задачі профілювання можливо знайти профіль інструмента або деталі. В основу дослідження застосуємо графічний метод Релло відомий як метод спільних нормалей. Суть методу полягає у наступному – в точці контакту інструмента та деталі вони мають спільну нормаль до своїх поверхонь. Це положення можна трактувати інакше – у момент формоутворення в точці контакту інструмент–деталь загальна нормаль проходить через миттєвий полюс зачеплення.

Проведемо через полюс миттєвого обертання  $P$  нормаль до поверхні деталі (рис. 1). Сукупність точок  $E$  перетину нормалей до поверхні деталі при її різних положеннях буде лінією зачеплення інструмента та деталі. При прийнятій кінематичній схемі формоутворення воно є плоским. Для його дослідження необхідно знати розмір початкового кола (п. к.) та положення полюса  $P$  миттєвого обертання. Будемо розглядати утворення деталей, які мають тільки прями профіль.

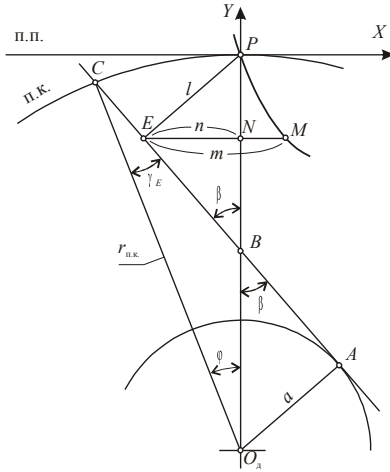


Рис. 1. Кочення кола по прямій

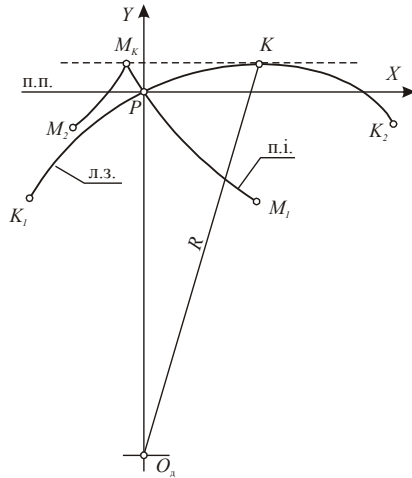


Рис. 2. Лінія зачеплення та профіль інструмента

Будемо вважати відомим радіус  $r_{п.к.}$  початкового кола. Точка  $P$  – миттєвий полюс обертання при коченні початкового кола (п. к.) по початковій прямій (п. п.). Вісь  $X$  співпадає з початковою прямою. Вісь  $Y$  проходить через центр  $O_d$  початкового кола та полюс  $P$ . Початок системи координат  $XY$  співпадає з положенням полюса  $P$ .

Лінія  $AC$  проходить через прямолінійний профіль деталі. Коло радіуса  $a$  дотичне до прямої  $AC$ . Його центр співпадає з центром деталі  $O_d$ . Важливим моментом дослідження є те, що лінія  $AC$  не обмежена точками  $A$  та  $C$ . Вона має нескінченну довжину в обидві сторони.

Враховуючи те, що лінія  $AC$  дотична до кола радіуса  $a$ , можливо стверджувати, що лінії  $AC$  та  $O_dA$  перпендикулярні одна одній. У процесі формоутворення початкове коло котиться по початковій прямій і одночасно з цим рухається і лінія  $AC$ , завжди будучи дотичною до кола радіуса  $a$ . Будемо характеризувати процес обкати величиною кута  $\beta$ .

У момент контакту інструмента та деталі, нормаль до поверхні деталі проходить через миттєвий полюс зачеплення. Отже лінія  $PE$ , яка проходить через точку  $P$  та одночасно перпендикулярна до поверхні деталі (лінія  $AC$ ) є графічним представленням моменту формоутворення точки  $E$  поверхні деталі. Сукупність точок  $E$  утворює лінію зачеплення.

Координати  $(x_E; y_E)$  точки  $E$  можливо визначити через довжину  $l$  нормалі  $PE$  та кут  $\beta$ :

$$x_E = -l \cos \beta, \quad y_E = -l \sin \beta. \quad (1)$$

Довжину  $l$  нормалі  $PE$  можливо записати як  $l = \overline{PB} \sin \beta$ , а відрізок  $\overline{PB}$  як:

$$\overline{PB} = r_{\text{п.к.}} - \overline{BO}_d = r_{\text{п.к.}} - \frac{a}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Тоді довжина  $l$  нормалі  $PE$  буде:

$$l = \left( r_{\text{п.к.}} - \frac{a}{\sin \beta} \right) \sin \beta = r_{\text{п.к.}} \sin \beta - a. \quad (3)$$

Таким чином, математичні залежності для визначення координат точки контакту  $E$  матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_E &= -\left( r_{\text{п.к.}} \sin \beta - a \right) \cos \beta = -r_{\text{п.к.}} \sin \beta \cos \beta + a \cos \beta; \\ y_E &= -\left( r_{\text{п.к.}} \sin \beta - a \right) \sin \beta = -r_{\text{п.к.}} \sin^2 \beta + a \cos \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того щоб визначити координати точки лінії зачеплення, необхідно прийняти ряд послідовних значень кута  $\beta$ . Коло радіуса  $a$  залежить тільки від розмірів деталі. У той же час радіус  $r_{\text{п.к.}}$  початкового кола може бути різним. Отже форма лінії зачеплення може бути різною для однієї і тієї ж деталі залежно від розміру початкового кола.

**Профіль різальної кромки.** При відомій лінії зачеплення координати точки  $M$  різальної кромки (рис. 1) можливо визначити таким чином. Відповідно до досліджуваної схеми формоутворення, точка контакту  $E$  та відповідна їй точка різальної кромки  $M$  мають однакове значення координати  $y$ , адже у процесі обробки інструмент переміщується поступально вздовж початкової прямої, а деталь обертається навколо своєї осі. Це дозволяє записати наступне:

$$x_M = m - n; \quad y_M = y_E. \quad (5)$$

Параметр  $m$  – це відстань між точками лінії зачеплення та різальною кромкою, що виміряна вздовж напрямку початкової прямої, яка співпадає з координатною віссю  $X$ . Геометрично – це відстань, на яку переміститься інструмент, коли початкове коло прокотиться по початковій прямій на довжину дуги  $PC$ . Параметр  $n$  – це відстань від точки контакту  $E$  до координатної осі  $Y$ . На кресленні зображено момент формоутворення точки  $E$  поверхні деталі.

Параметр  $n$  можна визначити як довжину проекції нормалі  $PE$  на початкову пряму, яка співпадає з віссю  $X$ :

$$n = l \cos \beta - r_{п.к.} \sin \beta - a \cos \beta. \quad (6)$$

Початкове коло когиться по початковій прямій без ковзання. Таким чином, довжина відрізка  $m$  дорівнює довжині дуги початкового кола між точками  $C$  та  $P$ . Отже при відомому радіусі початкового кола  $r_{п.к.}$  та куті  $\varphi$  його повороту можливо записати  $m = r_{п.к.} \varphi$ . Кут  $\varphi$  визначимо як:

$$\varphi = 180^\circ - \gamma_c - (80^\circ - \beta) = \beta - \gamma_c; \quad (7)$$

$$\sin \gamma_c = \frac{a}{r_{п.к.}}.$$

Знаючи параметри  $n$  та  $m$ , можливо визначити координату  $x_M$  точки  $M$  інструмента як:

$$x_M = m - n = r_{п.к.} (\beta - \gamma_c) - r_{п.к.} \sin \beta - a \cos \beta. \quad (8)$$

Задаючи послідовний ряд значень кута  $\beta$ , можливо визначення координат точок профілю інструмента.

**Початкове коло.** Для процесу утворення деталі за прийнятою схемою формоутворення, найбільш важливим є отримання лінії зачеплення максимальної довжини. У такому випадку процес формоутворення відбувається максимально плавно. Визначимо величину початкового кола. На рисунку 2 зображена лінія зачеплення (л. з.) та профіль інструмента (п. і.). Точка  $K$  – це найвища точка лінії зачеплення у системі координат  $XU$ .

Якщо рухатись вздовж лінії зачеплення від точки  $K_1$  до точки  $K_2$ , то відповідні точки різальної кромки інструмента спочатку будуть підійматись до точки  $K$ , а потім почнуть опускатись. Це свідчить про те, що на профілі інструмента утвориться точка звороту  $M_K$ . Вона відповідає точці  $K$  лінії зачеплення. Таким чином, точка  $K$  лінії зачеплення є кінцевою точкою існування різальної кромки. З аналізу форми лінії зачеплення (відрізок  $KK_2$ ) можливо стверджувати, що від точки  $M_K$  і далі до точки  $M_2$  різальна кромка хоча і буде теоретично існувати, але відтворити її в металі неможливо.

Для того щоб визначити положення точки  $K$ , необхідно виконати диференціювання виразу (4) для координати  $y_E$  лінії зачеплення за параметром  $\beta$  та прирівняти отриманий вираз до нуля:

$$\frac{\partial y_E}{\partial \beta} = \frac{\partial (r_{п.к.} \sin \beta - r_{п.к.} \sin^2 \beta)}{\partial \beta} = 0. \quad (9)$$

Виконавши відповідні математичні перетворення залежності (9), отримаємо рівняння:

$$a \cos \beta - 2r_{п.к.} \cos \beta \sin \beta = 0. \quad (10)$$

Розділимо його на  $\cos\beta$  та отримаємо після перетворень:

$$a - 2r_{\text{п.к.}} \sin \beta = 0; \quad \sin \beta = \frac{a}{2r_{\text{п.к.}}} . \quad (11)$$

Враховуючи співвідношення між тригонометричними функціями синуса та косинуса кута  $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$  та залежність (11) можливо записати:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r_{\text{п.к.}}}\right)^2} . \quad (12)$$

Враховуючи отримані тригонометричні залежності для кута  $\beta$ , можливо переписати координати  $x_E$  та  $y_E$  лінії зачеплення (4) у вигляді:

$$x_E = \frac{1}{2} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r_{\text{п.к.}}^2}}; \quad y_E = \left(\frac{a}{2r_{\text{п.к.}}}\right)^2 . \quad (13)$$

Ці координати лінії зачеплення були отримані для значень кута  $\beta$ , що відповідав точці  $K$  перелому лінії зачеплення. Отже, отримані вирази (13) будуть описувати координати  $(x_K; y_K)$  точки  $K$  лінії зачеплення:

$$x_K = \frac{1}{2} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r_{\text{п.к.}}^2}}; \quad y_K = \frac{a^2}{4r_{\text{п.к.}}^2} . \quad (14)$$

Рівняння кола радіуса  $R$ , яке проходить через точку  $K$  з координатами  $x_K$  та  $y_K$  і має центр, що співпадає з центром  $O_d$ , можливо записати у формі:

$$R^2 = x_K^2 + y_K^2 . \quad (15)$$

Геометрично радіус  $R$  – це радіус, на якому знаходиться найбільш віддалена точка прямолінійного профілю деталі, адже коло проходить через точку  $K$  лінії зачеплення. З рівняння (15) можливо знайти радіус початкового кола:

$$r_{\text{п.к.}} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - 3a^2} = \sqrt{\frac{4R^2}{4} - \frac{3}{4} a^2} = \sqrt{R^2 - 0,75a^2} , \quad (16)$$

або

$$r_{\text{п.к.}} = \sqrt{R^2 \left(1 - 0,75 \frac{a^2}{R^2}\right)} . \quad (17)$$

Вираз  $\frac{a^2}{R^2}$ , присутній у формулі (17), може бути виражений через тригонометричну функцію  $\sin \gamma_M = \frac{a^2}{R^2}$  (мінімальне значення кута  $\gamma$ ). Тоді радіус початкового кола можливо визначити як:

$$r_{п.к.} = R\sqrt{1 - 0,75\sin^2 \gamma_M}. \quad (18)$$

Радіус початкового кола, розрахований за залежністю (18), є мінімально допустимим. Він забезпечує найбільшу довжину активної ділянки лінії зачеплення. Взагалі радіус початкового кола може бути і більшим за визначений, але у такому випадку довжина активної ділянки лінії зачеплення буде меншою.

**Межі існування перемінного параметра.** В отриманих вище залежностях для розрахунку координат лінії зачеплення та профілю інструмента, як перемінний параметр був кут  $\beta$ . Визначимо його початкове  $\beta_n$  та кінцеве  $\beta_k$  значення виходячи з умови, що радіус початкового кола розраховано за залежністю (18).

Початкове значення кута  $\beta_n$  відповідає моменту формоутворення, коли прямолінійний профіль інструмента проходить через точку  $K$  перелому лінії зачеплення, координата  $y_E$  якої визначається із залежності:

$$y_E = a \sin \beta - r_{п.к.} \sin^2 \beta. \quad (19)$$

У точці  $K$  перелому лінії зачеплення дотична до неї буде розташована паралельно осі  $X$ . Для того щоб знайти кут  $\beta$ , який відповідає цьому моменту, необхідно виконати диференціювання (19) координати  $y_E$  за параметром  $\beta$  та прирівняти отриманий вираз до нуля. Отже:

$$\frac{\partial y_E}{\partial \beta} = \frac{\partial (a \sin \beta - r_{п.к.} \sin^2 \beta)}{\partial \beta} = 2r_{п.к.} \sin \beta - a = 0. \quad (20)$$

Звідки отримаємо початкове значення кута  $\beta_n$  як аргумент тригонометричної функції:

$$\sin \beta_n = \frac{a}{2r_{п.к.}}. \quad (21)$$

Кінцеве значення параметра  $\beta_k$  можливо визначити виходячи з умови обробки повної висоти  $h$  профілю деталі. Для того щоб обробити деталь по всій висоті  $h$  її профілю, необхідне виконання рівняння  $y_E = -h$ . Знак мінус у наведеному рівнянні треба вказувати тому, що координата  $y_E$  розташована на від'ємній ділянці координатної осі  $Y$ . Отже:

$$y_E = a \sin \beta - r_{\text{п.к.}} \sin^2 \beta = -h. \quad (22)$$

Звідки отримаємо рівняння другого порядку:

$$r_{\text{п.к.}} \sin^2 \beta - a \sin \beta - h = 0. \quad (23)$$

Виконаємо заміну перемінної, прийнявши  $\sin \beta = q$ . Тоді рівняння (23) прийме вигляд:

$$r_{\text{п.к.}} q^2 - aq - h = 0. \quad (24)$$

Звідки визначимо:

$$\sin \beta = q = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4r_{\text{п.к.}} h}}{2r_{\text{п.к.}}}. \quad (25)$$

Отримане значення кута  $\beta$  є кінцевою границею  $\beta_k$  зміни перемінного параметра, яке залежить від трьох параметрів – радіуса кола  $a$ , початкового кола  $r_{\text{п.к.}}$  та висоти профілю деталі  $h$ .

Розглянемо випадок, коли радіус початкового кола прийнято більшим, ніж розрахований за (18). З розгляду фігури  $PEAO_d$ , застосовуючи теорему подібних трикутників, можливо записати таке співвідношення:

$$\frac{R \cos \gamma_M - \frac{a}{\operatorname{tg} \beta}}{\frac{a}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{r_{\text{п.к.}} - \frac{a}{\sin \beta}}{\frac{a}{\sin \beta}}. \quad (26)$$

Звідки

$$\cos \beta = \frac{R \cos \gamma_M}{r_{\text{п.к.}}}. \quad (27)$$

Вираз (27) визначає початкове значення  $\beta_{\text{п}} = \beta$  у випадку, коли розмір початкового кола прийнято більшим, ніж розрахований за (18).

**Висновок.** На підставі проведеного аналізу розмірів початкового кола та форми лінії зачеплення можливо зробити такі висновки.

Розмір початкового кола має найбільший вплив на профіль інструмента та можливість його існування в цілому. Обґрунтовано математичні залежності для розрахунку радіуса початкового кола, яке має найменший розмір та забезпечує найбільшу довжину активної ділянки лінії зачеплення. Показано, що лінія зачеплення має точку перелому, яка є кінцевою точкою існування профілю інструмента. Відстань від цієї точки до центра деталі дорівнює найбільшому радіусу деталі, який можливо обробити.



Отримані результати можливо застосовувати при профілюванні обкатного інструмента, що працює за кінематичною схемою кочення кола по прямій.

### Список використаної літератури:

1. Основи формоутворення поверхонь при механічній обробці : підручник / *Н.С. Равська, П.Р. Родін, Т.П. Ніколаєнко та ін.* – Житомир : ЖІТІ, 2000. – 332 с.
2. Геометрія сопряженных поверхностей : підручник / *Н.С. Равська, П.Р. Родін, Т.П. Ніколаєнко та ін.* – Житомир : ЖІТІ, 2001. – 319 с.
3. Різальний інструмент : підручник / *Н.С. Равська, П.Р. Родін, В.І. Солодкий та ін.* – Житомир : ЖІТІ, 2002. – 289 с.
4. Справочник конструктора-инструментальщика / под общ. ред. *В.И. Баранчикова.* – М. : Машиностроение, 1994. – 500 с.
5. *Клименко Г.П.* Оптимізація регламентів експлуатації інструмента на важких верстатах / *Г.П. Клименко* // Наукові праці Донецького технічного університету / Машинобудування і машинознавство. – Донецьк : ДонНТУ, 2004. – Вип. 71. – С. 97–104.
6. *Івченко Т.Г.* Розробка теоретичних методів оцінки надійності різального інструмента / *Т.Г. Івченко* // Наукові праці Донецького технічного університету / Машинобудування і машинознавство. – Донецьк : ДонНТУ, 2004. – Вип. 71. – С. 81–91.
7. *Солодкий В.И.* Кинематические исследования условий контакта сопряженных поверхностей / *В.И. Солодкий, Н.С. Равская, П.Р. Родин* // Вестник Национального технического университета Украины “КПИ” / Машиностроение. – К. : НТУУ “КПИ”, 2001. – Вып. 41. – С. 3–9.
8. *Гнатейко Н.И.* Анализ влияния динамики ТОС на качество обработки деталей точением / *Н.И. Гнатенко* // Вестник Национального технического университета Украины “КПИ” / Машиностроение. – К. : НТУУ “КПИ”, 2009. – Вып. 55. – С. 154–160.

СОЛОДКИЙ Валерій Іванович – кандидат технічних наук, доцент кафедри “Інтегровані технології машинобудування” ім. П.Р. Родіна Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

- теорія проектування різального інструменту;
  - формоутворення гвинтових поверхонь.
- Тел.: (роб.) (044)454–95–28.  
E-mail: [solodkiyvi@bigmir.net](mailto:solodkiyvi@bigmir.net)

Стаття надійшла до редакції 18.04.2012

**Солодкий В.І.** Розмір початкового кола при обробці деталей методом качення

**Солодкий В.И.** Размер начальной окружности при обработке деталей методом качения

**Solodkiy V.I.** The amount of initial circumferential machining of parts by the method of rolling

УДК 621.9.02

**Размер начальной окружности при обработке деталей методом качения / В.И. Солодкий**

Изложена методика определения радиуса начальной окружности для кинематической схемы формообразования деталей, которая соответствует качению круга по прямой. Рассмотрены вопросы влияния формы линии зацепления на профиль инструмента. Определена точка возврата на линии зацепления, а также условия получения активного участка линии зацепления, который имеет максимальную длину.

УДК 621.9.02

**The amount of initial circumferential machining of parts by the method of rolling / V.I. Solodkiy**

The method of determining the radius of the pitch circle of the kinematic scheme forming part, that corresponds to the rolling circle in a straight line. Let us consider the impact of the line shape on the link in the tool. Determine the point of return to the county line engagement, and the terms of the line of obtaining an active engagement, which has a maximum length.